УДК 550.338

А. В. Радиевский, И. И. Шагимуратов

GPS/ГЛОНАСС-ТОМОГРАФИИ ИОНОСФЕРЫ

Исследована проблема восстановления высотного профиля ионосферы из GPS/ГЛОНАСС-наблюдений.

The article tackles the problem of the reconstruction of ionospheric electron density height structure by means of GPS/GLONASS systems.

Ключевые слова: ионосфера, томография, ГЛОНАСС.

Keywords: ionosphere, tomography, GLONASS.

Хорошо известно, что ионосферная часть задержки GPS/ГЛОНАСС-сигнала от спутника до приемника в главном приближении прямо пропорциональна полному электронному содержанию NT [1—8]

$$NT(\beta) = \int_0^H N(\beta,h)dL(\beta,h)\,. \tag{1}$$

Здесь $N(\beta,h)$ концентрация электронов в ионосфере. Классическая задача томографии состоит в определении некоторого неизвестного распределения $N(\beta,h)$ по известной функции $NT(\beta)$. В практических задачах эта функция чаще всего задается в виде таблицы $NT(\beta_i)$, в частности, для GPS общедоступными являются данные измерений с 30-секундным интервалом. Геометрия задачи представлена на рисунке 1.

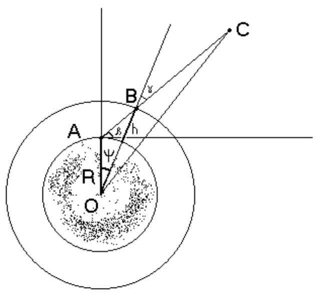

Рис. 1. Геометрия задачи: AC — линия визирования;
O — центр Земли; β — угол места; ψ — центральный угол; R — радиус Земли;
h — высота точки визирования; H — радиус орбиты спутника; угол γ= π/2–β–ψ

Для численного решения обратной задачи необходимо представить правую часть (1) в виде конечно-разностной аппроксимации с использованием квадратур по формулам прямоугольников или трапеций:

$$
\begin{aligned}
NT(\beta) &= \int_0^{h_1} N(\beta,h)dL(\beta,h) + \int_{h_1}^{h_2} N(\beta,h)dL(\beta,h) + \ldots + \int_{H-h_n}^{H} N(\beta,h)dL(\beta,h) = \\
&= N(\beta,h_0^*)\int_0^{h_1} dL(\beta,h) + N(\beta,h_1^*)\int_{h_1}^{h_2} dL(\beta,h) + \ldots + N(\beta,h_{n-1}^*)\int_{H-h_n}^{H} dL(\beta,h) \cong \\
&\cong N(\beta,h_0)\int_0^{h_1} dL(\beta,h) + N(\beta,h_1)\int_{h_1}^{h_2} dL(\beta,h) + \ldots + N(\beta,h_{n-1})\int_{H-h_n}^{H} dL(\beta,h)
\end{aligned} \quad (2)
$$

Переход в (2) от $N(\beta,h_j^*)$ со звездочкой к $N(\beta,h_j)$ предполагает, что в каждом *j*-слое электронная концентрация постоянна. Если слой достаточно тонкий, то вносимая этим приближением погрешность достаточно мала.

В результате задача томографии (1) сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений относительно переменных $N(\beta_i,h_j)$

$$\mathbf{A}\boldsymbol{N} = \boldsymbol{NT}. \quad (3)$$

Коэффициенты матриц $\mathbf{A}$ и $\boldsymbol{NT}$ определяются следующими соотношениями

$$A_{ij} = \int_{h_{j-1}}^{h_j} dL(\beta_i,h), \ NT_i = NT(\beta_i). \quad (4)$$

Достаточно простая на первый взгляд задача решения системы (3) при численном решении традиционными методами линейной алгебры оказывается практически неразрешимой. Главная трудность состоит в том, что так называемое число обусловленности матрицы по порядку величины $\mathrm{cond}(\mathbf{A}) \sim 10^9 \div 10^{11}$ оказывается очень большим. Это свидетельствует о том, что рассматриваемая система линейных уравнений (3) весьма близка к линейно зависимой. Кроме того, большая величина числа обусловленности приводит к тому, что любая погрешность в определении правой части увеличивает в $\mathrm{cond}(\mathbf{A})$ раз ошибку самого решения.

В математике задачи такого рода возникают достаточно часто и носят название некорректно поставленных задач. Во многих случаях применение регуляризирующих алгоритмов по методу Тихонова или оптимальной фильтрации Калмана помогает найти решение достаточно близкое к точному. Успех решения такого класса задач зависит от наличия априорных сведений о характере искомого точного решения, таких как выпуклость, гладкость, дифференцируемость, знакоопределенность, ограниченность и др. Начальное приближение выбирается также из априорных соображений.

Здесь мы рассматриваем метод регуляризации Тихонова. В этом методе ставятся два условия: условие минимизации невязки $\|AN - NT\|^2 = \min\limits_N$ и условие минимизации нормы решения $\|N\|^2 = \min\limits_N$.

Эта задача условной минимизации, и она решается методом неопределенных множителей Лагранжа, а именно:

$$\|AN - NT\|^2 + \alpha\|N\|^2 = \min_N, \quad (5)$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации, играющий роль множителя Лагранжа. Из (5) вытекает уравнение Тихонова

$$(\alpha E + A^T A)N_\alpha = A^T NT\ , \tag{6}$$

где E — единичный оператор. Данное уравнение решается численно с использованием подходящего метода, например метода Гаусса, сингулярного разложения, разложения Холецкого, QR-разложения и др. В этой работе мы использовали QR-разложение. Выбор разумного значения параметра регуляризации α в модельной задаче осуществляется методом подбора, а затем полученная величина используется для практических расчетов с реальными экспериментальными данными.

Для демонстрации применимости данных методов для решения обратных задач рассмотрим простейшую задачу по восстановлению высотного распределения электронной концентрации. Зависимость центрального угла $\psi = \psi(\beta, h)$ имеет следующий вид

$$\psi(\beta,h) = \pi/2 - \beta - \arcsin(R\cos(\beta)/(R+h)); \tag{7}$$

соответственно, для угла $\gamma = \arcsin(R\cos(\beta)/(R+h))$. Легко определить длину луча от места наблюдения до точки визирования $|AB| = L(\beta, h)$:

$$L(\beta,h) = [R^2 + (R+h)^2 - 2(R+h)R\sin(\beta + \arcsin(R\cos(\beta)/(R+h)))]^{1/2}\ . \tag{8}$$

Для настоящей модельной задачи будем рассматривать сферически симметричное распределение электронной концентрации, полагая, что $N(\beta,h) = N(h)$. Тогда (1) приобретает вид

$$NT(\beta) = \int_0^H N(\beta,h)dL(\beta,h) = \int_0^H N(h)\frac{\partial L}{\partial h}dh =$$

$$= \int_0^H \frac{N(h)\{R + h - R\cos(\psi(\beta,h)) + \dfrac{R^2\cos(\beta)\sin(\psi(\beta,h))}{(R+h)(1-(R^2\cos(\beta)^2/(R+h)^2)^{1/2})}\}}{[R^2 + (R+h)^2 - 2(R+h)R\sin(\beta + \arcsin(R\cos(\beta)/(R+h)))]^{1/2}}dh. \tag{9}$$

Таким образом, имея какое-либо модельное (заданное в аналитическом виде) распределение электронной концентрации по формуле (9), мы можем рассчитать соответствующее (модельное) полное электронное содержание на пути от точки наблюдения до спутника для любых доступных углов наблюдения β. Эти данные будем считать исходными для решения обратной задачи (6).

Модельное распределение имеет вид функции Чепмена

$$N(h) = \sum_{i=1}^{3} A_i \exp\{a_i[1-(h-p_i)/h_i - \exp((h-p_i)/h_i)]\}\ ,$$

где все индексированные параметры подобраны для E, F_1 и F_2-слоев.

	E-слой	F_1-слой	F_2-слой
A_i	1,66	2,44	3,66
a_i	0,5	0,5	1
p_i	110	180	300
h_i	10	34	70

Эта функция представлена на рисунке 2.

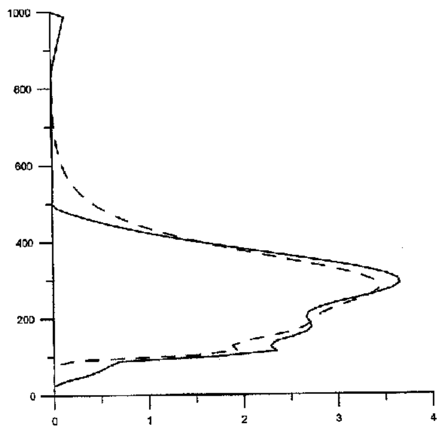

Рис. 2. Штриховая линия — модельная функция,
сплошная — результат томографического восстановления

Матрица A имела размер 100×100, параметр регуляризации $\alpha=10^{-3}$. В качестве начального приближения бралась величина равная 10 % от модельного распределения.

Сравнивая кривые на рисунке 2, видим, что результат восстановления качественно правильно отражает характер поведения высотного профиля.

Список литературы

1. *Austen J.R., Franke S.J., Liu C.H.* // *Radio Science.* 1988. 23. P. 299.
2. *Raymund T.D., Austen J.R., Franke S.J. et al.* // Radio Science. 1990. 25. P. 771.
3. *Адрианов В.А., Араманд Н.А. и др.* // Исследование Земли из космоса. 1996. №2. С. 10.
4. *Brown A., Ganguly S.* // Radio Science. 2001. 36. P. 745.
5. *Hernandez-Pajares M., Jung J.M. et al.* // Geophysical Research Letters. 2000. 27. P. 2009.
6. *Hernandez-Pajares M., Jung J.M. et al.* // Ibid. P. 2473.
7. *Franke S.J., Yeh K.C. et al.* // Radio Science. 2003. 38. P. 1011.
8. *Andreeva E.S., Franke S.J. et al.* // Geophysical Research Letters. 2000. 27. P. 2465.

Об авторах

А. В. Радиевский — канд. физ.-мат. наук, доц., РГУ им. И. Канта.

И. И. Шагимуратов — канд. физ.-мат. наук, директор ЗО ИЗМИРАН.

Authors

A. Radiyevsky — Dr., IKSUR.

I. Shagimuratov — Dr., head of the Western Division of the Institute of Terrestrial Magnetism Ionosphere and Radiowave.